A aprendizagem de ângulos através da pavimentação do plano com ladrilhos: Experimentação e prática de sala de aula

Learning angles through plane tiling: experimentation and classroom practice

AUTOR: MARLON SILVA DO NASCIMENTO[1]

ORIENTADOR: ALLANDERSON LEANDER SOUZA DA LUZ[2]

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar como estudantes entendem e aprendem os conceitos de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos. O alicerce teórico baseia-se nos estudos de Skovsmose (2001) que fundamenta a Educação Matemática Crítica (EMC) e defende uma aprendizagem contextualizada e conectada a situações reais, promovendo o desenvolvimento de habilidades críticas e cognitivas e na aprendizagem experiencial de Kolb (1984), que sugere que o aprendizado é um processo cíclico que envolve experiência concreta, observação, conceituação e a experimentação. A metodologia empregada envolveu uma abordagem qualitativa e foi desenvolvida em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental em um colégio público da rede municipal de ensino do território Médio Rio das Contas. A coleta de dados aconteceu por meio da observação e dos relatos dos discentes durante as oficinas. A análise foi realizada com base nas respostas de estudantes, na interação e nas estratégias montadas para resolver as atividades propostas. Os principais resultados destacam a importância de atividades práticas e interativas para o entendimento de conceitos abstratos como ângulos, mostrando que a experimentação com ladrilhos contribui para o entendimento dos conceitos geométricos por estudantes. Este estudo contribui para o desenvolvimento de metodologias de ensino que integrem a geometria com atividades práticas, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado para estudantes.

Palavras-chave: *Geometria; Ladrilho; Ângulos.*

ABSTRACT

The objective of this research is to investigate how students understand and learn the concepts of angles through experimentation with tiles. The theoretical foundation is based on Skovsmose's (2001) studies, which underpin Critical Mathematics Education (CME) and advocate for contextualized learning connected to real-life situations, promoting the development of critical and cognitive skills. It also draws on Kolb's (1984) experiential learning theory, which suggests that learning is a cyclical process involving concrete experience, observation, conceptualization, and experimentation. The methodology employed involved a qualitative approach and was conducted with an 8th-grade class in a public school within the Médio Rio das Contas municipal education network. Data collection was carried out through observation and students' reports during workshops. The analysis was based on students' responses, their interactions, and the strategies developed to solve the proposed activities. The main results highlight the importance of practical and interactive activities for understanding abstract concepts such as angles, demonstrating that experimentation with tiles aids students in grasping geometric concepts. This study contributes to the development of teaching methodologies that integrate geometry with practical activities, promoting more meaningful and contextualized learning for students.

Key-words: *Geometry; Tiles; Angles.*

[1] Discente do programa de especialização em ensino de Matemática: Matemática na Prática. Contato: marlon.sil@hotmail.com

[2] Mestre em Educação Científica, Inclusão e Diversidade. Contato: allandersonluz@ifba.edu.br.

Introdução

A aprendizagem de geometria tem um grande potencial em auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão do mundo em que vivemos. No entanto estudantes ainda enfrentam dificuldades nessa área devido à falta de conexão entre a teoria matemática e suas aplicações pratica, segundo Freire (1970) argumenta que a educação deve ser um processo de conscientização, no qual estudantes são encorajados a relacionar o conhecimento teórico com suas experiências práticas, promovendo assim uma compreensão crítica e transformadora da realidade.". Em seus estudos, Inhelder (1963) destaca a importância de experiências concretas e contextualizadas para facilitar a compreensão de conceitos geométricos. Práticas como estas incentiva docentes e gestão escolar em pensar como proporcionar experiências práticas mais acessíveis e significativas de modo que estudantes consigam entender e dominar esses conceitos geométricos.

Uma prática pedagógica possível é a criação de mosaicos e ladrilhos. Atividades como esta possibilitam manipular formas e ângulos, estimulam o pensamento crítico e permitem fazer uma interdisciplinaridade entre a matemática e a arte em sala de aula, fazendo com que o aprendizado de geometria possa ser mais acessível e envolvente. Eisner (2002) destaca que “a integração das artes no currículo escolar não só enriquece o aprendizado, mas também desenvolve o pensamento crítico e criativo, tornando atividades como a criação de mosaicos e ladrilhamento uma ferramenta eficaz para o ensino de geometria”, assim, estudantes podem explorar conceitos geométricos de forma visual e criativa enquanto desenvolvem habilidades artísticas, conforme apontado por Van Hiele (1986). Uma abordagem prática e interdisciplinar é um caminho possível para o desenvolvimento de competências geométricas e habilidades artísticas, e para tornar o aprendizado da geometria mais acessível e envolvente.

O uso de ladrilhamentos em sala de aula possibilita a exploração prática de conceitos geométricos alinhando-se às orientações da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) para o desenvolvimento de competências matemáticas. Essa técnica incentiva o reconhecimento de padrões e simetrias, favorecendo uma aprendizagem integrada e contextualizada, que aproxima a matemática de suas aplicações no mundo real (Júlio *et al*, 2018). Neste contexto, esta pesquisa tem por objetivo investigar como estudantes entendem e aprendem os conceitos de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos. Sendo assim, este estudo busca responder o seguinte questionamento: *Como as experimentações com ladrilhos poderão auxiliar na aprendizagem sobre ângulos e também de outras áreas do conhecimento, a partir de reflexões produzidas em sala de aula?*

A utilização desses moldes como ferramenta didática permite uma abordagem prática que pode ajudar estudantes a visualizar e entender melhor conceitos abstratos, como ângulos e suas propriedades. Ao manipular fisicamente os moldes de polígonos regulares, estudantes têm a oportunidade de explorar de maneira concreta e lúdica a geometria, facilitando a construção do conhecimento. Essa prática também relaciona a matemática com o cotidiano, pois o reconhecimento de padrões geométricos em ladrilhamentos está presente em diversos elementos do dia a dia, como na arquitetura, na natureza, nas indústrias dentre outros, o que reforça a compreensão contextualizada defendida por Inhelder (1963), também pela BNCC (Brasil, 2018), que destaca a importância de experiências práticas e significativas para a aprendizagem de conceitos abstratos.

A pesquisa foi realizada em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental em um colégio público da rede municipal de ensino do território Médio Rio das Contas, onde se observou uma predominância de métodos que se baseiam apenas em exercícios abstratos e sem referências da realidade daquela comunidade. Nesse contexto, este estudo foi realizado em cinco etapas e se propôs a integrar teoria e prática, buscando um maior envolvimento de discentes através de atividades que incentivem a criatividade e a colaboração.

Este trabalho busca não apenas a melhoria e o entendimento de estudantes sobre geometria, mas também tornar o aprendizado mais envolvente e relevante. A seguir apresentamos o referencial teórico que embasa este estudo.

1. Referencial Teórico

O ladrilhamento, ou pavimentação, é uma técnica matemática e artística bastante antiga, que surgiu desde que as pessoas começaram a usar pedras para cobrir o chão e as paredes de suas casas. Segundo Sallum (2016), esta técnica consiste em cobrir uma superfície plana utilizando formas geométricas que se encaixam perfeitamente, sem deixar espaços vazios ou sobreposições. As primeiras peças de ladrilhos foram encontradas no Egito há cerca de 4000 anos antes de Cristo e com o passar do tempo continuou com a aplicação de cores, desenhos ou figuras para deixar os ladrilhos mais harmônicos, como destacado por Grube (1989), que examina a evolução desta prática artística em seu estudo sobre cerâmica islâmica."

Curiosamente, o ladrilhamento não se restringe apenas às criações humanas; podemos encontrá-los facilmente na natureza por exemplo no favo de mel, nas escamas de peixes, em frutas como o abacaxi, nas células de tecidos biológicos, nos cristais, na bolha de sabão, na pele de cobras, dentre outras coisas segundo Joannes Kepler (2007) que explorou padrões na natureza, relacionando-os a geometria e simetria. Na atualidade, o ladrilhamento ainda é bastante utilizado pelas indústrias de cerâmicas, pisos, azulejos, papéis de parede; também em estamparias de tecidos, crochês, decoração, dentre outros objetos.

O estudo das propriedades matemáticas das pavimentações do plano por polígonos é recente e ainda tem muito o que ser explorado. O astrônomo, Joannes Kepler (2007) parece ter sido o pioneiro no estudo da geometria das pavimentações; a partir da observação dos trabalhos de Platão e Arquimedes que Kepler apresentou uma classificação das pavimentações usando polígonos regulares, na qual prova a existência de onze tipos de pavimentações. No entanto, nenhum deles permite o uso de pentágonos regulares. Além dos ladrilhamentos com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, também existem ladrilhamentos com pentágonos irregulares.

Júlio *et al.* (2018) acrescenta que os ladrilhos formam a pavimentação do plano, através do revestimento de uma região plana sem que haja espaço ou sobreposição entre os polígonos. Já Oliveira (2015, p. 28), “fala que a divisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos de modo que a união de todos esses polígonos constitui todo o plano, e a interseção de dois desses polígonos ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal”. Estas formas podem ser polígonos regulares (como triângulos, quadrados e hexágonos) ou polígonos irregulares, desde que seus lados se compatibilizem para cobrir a superfície sem lacunas. Existem três tipos principais de ladrilhamentos: os Regulares, que usam um único tipo de polígono repetidamente; os Semirregulares, que combinam vários polígonos regulares de forma regular; e os Irregulares, que utilizam polígonos irregulares ajustados para preencher a superfície sem espaços vazios.

Penrose (2006), Escher (2004) e Coxeter (1999) são três nomes que foram fundamentais para o avanço teórico e prático no estudo dos ladrilhamentos, explorando as propriedades matemáticas e geométricas das formas que podem preencher o plano de maneira organizada e esteticamente agradável. Penrose (2006) foi um matemático britânico conhecido por desenvolver os "azulejos de Penrose", que são formas geométricas capazes de preencher o plano de maneira não periódica e sem repetições regulares. Já Escher (2004), um artista gráfico holandês famoso por suas obras que exploram conceitos de ladrilhamento de forma artística, frequentemente criando ilusões de ótica e padrões complexos usando formas geométricas. Por último temos Coxeter (1999), um matemático canadense reconhecido por seu trabalho em geometria, incluindo o estudo aprofundado de ladrilhamentos regulares e irregulares, que contribuiu significativamente para a compreensão matemática e geométrica desses padrões.

1.1 O ladrilhamento como prática pedagógica nas aulas de matemática

O ladrilhamento tem potencial para ser explorado em sala de aula, principalmente nas aulas de Geometria. Esta prática pedagógica é lúdica e pode motivar estudantes a participarem mais ativamente dessas aulas e também tem a capacidade de auxiliar no desenvolvimento de habilidades importantes, como a aptidão para a resolução de problemas, no pensamento lógico, no trabalho em equipe e até mesmo em habilidades artísticas, como Escher (2024).

É possível promover um ensino de geometria que supere as práticas pedagógicas que utilizam somente exercícios e abstrações, conforme Skovsmose (2001), defende que a educação matemática crítica deve integrar contextos significativos ao ensino, permitindo que os alunos compreendam a relevância dos conceitos geométricos em sua vida cotidiana e em diversas áreas do conhecimento.

Essa referência reforça a importância de um ensino de geometria que vá além das práticas tradicionais, dando ênfase a necessidade de contextualizar o aprendizado para alcançar uma compreensão mais profunda e significativa. A Educação Matemática Crítica dialoga diretamente com essa pesquisa por propiciar uma abordagem mais integrada e reflexiva sobre o ensino de geometria, buscando maneiras de ressignificar o ensino de conceitos geométricos através da experimentação prática, como a construção de ladrilhos pelos próprios alunos.

Van Hiele (1986) propõe um modelo de níveis de compreensão em Geometria, enfatizando a progressão através de experiências concretas para alcançar entendimentos abstratos mais elevados. De acordo com sua teoria o desenvolvimento do raciocínio geométrico ocorre em níveis, onde estudantes começam pela visualização direta das figuras (nível 1), passam pela análise das suas propriedades (nível 2), até chegarem ao uso de deduções lógicas e abstratas (nível 3).

Davis e Hersh (1981) argumentam que a matemática deve ser ensinada com contextos históricos e culturais para uma compreensão mais significativa. Bishop (1988) sugere que o ensino de Geometria deve incluir práticas e conhecimentos de diferentes culturas para enriquecer a aprendizagem.

É possível encontrar pesquisas sobre ladrilhamentos que mostram a importância dessa prática para a melhoria da aprendizagem de estudantes em Geometria. Em seus estudos, Mello (2015) trabalhou com possíveis ladrilhamentos no plano com polígonos regulares, respeitando seus conceitos e o Teorema de Kepler, com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Já Gumieri (2018) explorou conceitos de ângulos internos e externos de polígonos regulares utilizando o ladrilhamento no plano com discentes do Ensino Fundamental, com o objetivo de estimular o interesse em investigar o campo geométrico. Júlio *et al*. (2018) destacam que os ladrilhamentos na educação matemática foram inspirados nos elementos dos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Em se tratando de documentos norteadores da educação básica, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) não menciona diretamente o "ladrilhamento do plano", mas sugere o desenvolvimento de competências matemáticas e geométricas essenciais para entender e aplicar esse conceito. Além de propor o ensino de padrões geométricos e o uso de representações gráficas para modelar situações reais ou abstratas na Matemática. Embora não explicitamente citado, o ladrilhamento do plano, que envolve preencher uma superfície plana sem espaços vazios ou sobreposições, pode ser explorado através de atividades práticas e contextualizadas.

Sendo assim, o ladrilhamento tem potencial para ser explorado em sala de aula principalmente nas aulas de matemática, pois este tipo de experimento pode motivar estudantes a participarem mais ativamente das aulas de matemática, auxiliando seu desenvolvimento em habilidades importantes, como aptidão para resolução de problemas, pensamento lógico, trabalho em equipe e até mesmo em habilidades artísticas. Nesse sentido, Frankenstein (1983) argumenta que a educação matemática deve ir além da simples aplicação de fórmulas e algoritmos, visando a promoção de uma consciência crítica nos alunos sobre as implicações e usos da matemática em diferentes aspectos da sociedade.

Na elaboração desse projeto de pesquisa, além dos teóricos destacados, tomamos como base o livro Desafio Geométrico (Dias; Sampaio, 2013), pois o livro aborda conceitos fundamentais da geometria de forma prática e desafiadora, apresentando problemas e atividades que estimulam a aplicação e expansão do conhecimento geométrico. O livro busca promover o desenvolvimento do pensamento crítico e a resolução criativa de problemas, tornando o aprendizado da geometria mais dinâmico e acessível. Este livro foi um dos matérias de apoio estudados nas aulas do curso de especialização Matemática na Prática, ofertado pelo Instituto Federal de Educação da Bahia (IFBA).

2. Procedimentos metodológicos

A metodologia apresentada nesta pesquisa é de cunho qualitativo e não utiliza quantificações nem técnicas estatísticas, pois seu objetivo é compreender a realidade de determinados fenômenos com base em dados descritivos, considerando a percepção dos diversos atores sociais (Gil, 2002). Sendo assim, este trabalho busca entender *como as experimentações com ladrilhos poderão auxiliar na aprendizagem sobre ângulos e de outras áreas do conhecimento, a partir de reflexões produzidas em sala de aula?*

Acreditamos que o ensino de geometria pode ser enriquecido por abordagens que combinam teoria e prática, como o uso de ladrilhamento no plano. Essa metodologia permite aos discentes explorar ângulos e suas propriedades de maneira interativa, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e promovendo a criatividade e a colaboração. Em resumo, a pesquisa qualitativa realizada neste estudo envolveu a coleta de dados a partir das observações e produções de estudantes em resposta às oficinas propostas durante a fase de experimentação.

2.1 Participantes da Pesquisa

A presente pesquisa foi conduzida na escola Ladrilho do Saber, instituição com nome fictício e que está localizada no Território Médio Rio de Contas. Esta é uma instituição de ensino que conta com 394 estudantes matriculados em 2024 e 16 professores. A Ladrilho do Saber possui uma área ampla, mas conta com apenas 6 salas de aula, sala da direção, secretaria, sala de docentes, biblioteca com um acervo reduzido e quadra descoberta. Situada em um bairro periférico, a escola também adota uma lei municipal que proíbe o uso de celulares em sala de aula, restringindo a manipulação desses dispositivos durante o período escolar.

A pesquisa foi realizada em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, contudo, para este trabalho em específico foram analisados os resultados individuais produzidos por 2 participantes, onde um se identifica como menino – onde aqui será identificado com o nome fictício de Luiz – e uma como menina – que será identificada como Kéren. A seleção de cada estudante foi feita em comum acordo com a coordenação da escola, sendo o principal critério o baixo rendimento dos alunos em anos anteriores e a baixa motivação na disciplina.

Antes do início da pesquisa, as pessoas responsáveis por Luiz e Kéren assinaram um termo de consentimento. Este documento detalhava os objetivos e procedimentos da pesquisa, bem como os direitos de cada participante, assegurando transparência, respeito e proteção ao longo do estudo.

2.2. Instrumentos de produção de dados

Para uma investigação qualitativa sobre o uso de ladrilhos no estudo de ângulos, foi essencial selecionar instrumentos de produção de dados que permitisse uma compreensão profunda e detalhada das percepções, experiências e aprendizados de estudantes.

A produção de dados foi realizada por meio dos seguintes instrumentos: (a) **observação participante** e (b) **sequência didática**.

a) Observação participante

Este instrumento foi escolhido porque permitiu que o pesquisador se inserisse no ambiente do estudo, observando e registrando as atividades de cada estudante em tempo real. Esse método permitiu captar os comportamentos, interações e métodos de aprendizagem da turma enquanto manipulavam e estudavam os ladrilhos.

O pesquisador participou das aulas, observando como estudantes utilizavam os ladrilhos para explorar os ângulos e anotava os detalhes, focando nas estratégias de resolução de problemas, colaboração entre os pares e dificuldades encontradas. Ao final da pesquisa, esperou-se que as observações permitissem capturar a complexidade e a riqueza das experiências de estudantes com o experimento, fornecendo informações valiosas para aprimorar as práticas pedagógicas na educação geométrica.

b) Sequência didática

A sequência didática ajudou o pesquisador a registrar informações de forma organizada, tanto em ordem cronológica ou lógica. Essa técnica facilitou a análise e a interpretação dos dados, permitindo o acompanhamento das mudanças ao longo do tempo, identificando padrões de comportamento e aprendizado dos estudantes durante as oficinas. Este instrumento, facilitou os ajustes na metodologia durante as fases de experimentação, permitindo avaliar a reflexão crítica de estudantes sobre seu aprendizado e ainda fornecendo feedback para a coleta dos dados qualitativos de Luiz e Kéren. A seguir será apresentado todo o processo realizado nesta pesquisa, seus resultados e desdobramentos.

3. Resultados e Discussões

Esta atividade foi estruturada em cinco etapas: (1) Apresentação do tema e avaliação diagnóstica; (2) Construção dos moldes dos polígonos; (3) Investigação geométrica com mais de um polígono; (4) Matemática e Arte; (5) Aplicando o Ladrilhamento na resolução de atividades sobre ângulos. Nesta seção serão abordadas as observações e discussões provenientes das oficinas experimentais, os argumentos de Luiz e Kéren na resolução e discussão das atividades propostas e dos questionários aplicados.

3.1 Primeira etapa: Apresentação do tema

A pesquisa teve início com algumas perguntas feitas à turma de estudantes. Estas questões tiveram como objetivo verificar o nível de conhecimento acerca dos ladrilhamentos – e que neste trabalho serão apresentadas as visões de Luiz e Kéren. As perguntas feitas foram as seguintes:

1) Vocês já viram um ladrilhamento? E feito apenas de polígonos regulares? Onde?

2) Em que situações do cotidiano a pavimentação com polígonos regulares é usada? Quais tipos de polígonos foram utilizados?

3) Onde encontramos essa estrutura na natureza?

4) Existe algum ladrilhamento na arquitetura da sua escola? Onde?

Inicialmente, Luiz e Kéren foram questionados se conheciam algum ladrilhamento e se eram capazes de identifica-los na arquitetura da escola, na natureza ou na indústria e não mostraram ter muito conhecimento sobre ladrilhamento no plano. Luiz respondeu que já tinha ouvido a palavra ladrilhamento, mas não sabia explicar o significado. Já Kéren perguntou "Tem alguma coisa a ver com aqueles pisos antigos de tacos de madeira? pois o piso da minha casa é de taco". Sendo assim, o docente-pesquisador apresentou as definições de Júlio *et al.* (2018) e Oliveira (2015, p. 28).

Logo após a apresentação das definições, Luiz e Kéren foram convidados a caminhar pela escola para observar a arquitetura, os objetos, o jardim e as roupas das pessoas que trabalham na instituição, na expectativa de identificarem algum ladrilhamento. Nesta observação puderam perceber que o piso da escola, as paredes da sala e dos banheiros era formado por figuras geométricas de quatro lados e o caminho que dar acesso a quadra era formado por figuras de seis lados, embora não soubessem a nomenclatura. Também não conseguiram identificar ladrilhamento na natureza, nos objetos da escola ou nas roupas de estudantes, docentes e do pessoal de apoio.

Ao analisar individualmente as respostas de Luiz e Kéren, verificou-se que, em pelo menos um dos ambientes mencionados (banheiro), o revestimento não era composto por polígonos regulares. Isso evidenciou o conhecimento limitado de cada um dos discentes sobre o tema, uma vez que, conforme Oliveira (2015), um ladrilhamento bem estruturado deve obedecer às seguintes condições: (1) Os ladrilhamentos devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos; (2) A interseção de dois ladrilhos é sempre um lado ou um vértice e (3) Os ladrilhos ao redor de cada vértices do ladrilhamento é sempre o mesmo.

Dando seguimento a atividade, foi apresentado um vídeo[3] à turma que abordava sobre a natureza como fonte de inspiração para construção dos mosaicos e ladrilhamento e sua aplicação na indústria com o objetivo de aprofundar um pouco mais os conhecimentos de

---

[3] O seguinte vídeo foi elaborado pela equipe do Telecurso 2000 e pode ser encontrado em www.youtube.com/watch?v=NCeL6wFFHXk&t.

estudantes sobre o tema proposto. Após a exibição do vídeo, Kéren comentou que achou fascinante como essas formas aparecem frequentemente na natureza, enquanto Luiz destacou o quão interessante é a aplicação dessas formas na indústria de cerâmicas e azulejos. Entre os teóricos que abordam esses conceitos está Johannes Kepler (2007), que investigou padrões naturais como os favos de mel e cristais de gelo, relacionando-os aos princípios de geometria e simetria. Em seguida a turma foi orientada a trazer papel emborrachado, tesoura, lápis, compasso, transferidor e régua para próxima etapa da pesquisa.

3.2 Segunda etapa: Construção dos moldes e investigação geométrica utilizando apenas um tipo de polígono.

Na segunda etapa, a turma de estudantes foi convidada a confeccionar os 6 tipos de moldes de polígonos regulares que seriam utilizados no experimento. Para a confecção dos moldes foram utilizados materiais como régua, compasso, transferidor, tesoura, lápis e folhas de papel emborrachado. Após desenharem e recortarem os moldes, sem misturá-los, a turma explorou os polígonos, tentando cobrir a superfície da mesa da sala de aula com as peças (polígonos regulares) sem deixar espaço vazios ou sobrepô-las.

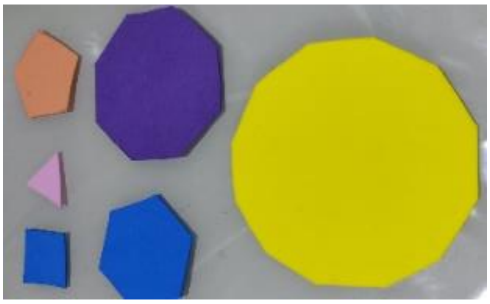

FIGURA 1: Moldes dos polígonos regulares construídos por estudantes.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

O objetivo da confecção destes moldes era fazer com que estudantes pudessem verificar experimentalmente quais polígonos regulares preenchiam perfeitamente o plano da mesa de sala de aula e identificassem qual a propriedade matemática de um polígono regular que permite ou impede essa pavimentação. Além disso, foram solicitados, que fossem feitas anotações detalhadas das tentativas realizadas, registrando o que funcionou e o que não funcionou, justificando cada etapa do processo. É importante ressaltar que, para pavimentar a superfície, não podem deixar espaços vazios entre as figuras nem as sobrepor (Júlio *et al*, 2018) e também foi fundamental lembrar aos estudantes que existem várias possibilidades de ladrilhamento.

No início, os polígonos não estavam sendo construídos uniformemente, pois os moldes tinham tamanhos variados. A turma então foi orientada a construir todos os moldes com lados medindo 4 cm de comprimento. Os polígonos já recortados em tamanhos diferentes foram separados para que, na fase de experimentação, fosse possível observar na prática a diferença entre um ladrilhamento feito com polígonos regulares de tamanhos iguais e outro com polígonos de tamanhos distintos, reforçando assim a definição de um ladrilhamento bem comportado segundo Oliveira (2015).

Nesta etapa de construção dos moldes, observou-se que Luiz e Kéren não possuíam experiência prévia na construção de polígonos regulares utilizando os instrumentos fornecidos. A fim de compensar a falta de atividades práticas na disciplina de matemática e promover o desenvolvimento de habilidades essenciais no uso de ferramentas como régua, transferidor e compasso, optou-se por não fornecer os moldes prontos. Essa abordagem visou incentivar o aprendizado ativo e o domínio gradual desses instrumentos, possibilitando que Luiz e Kéren manuseassem os instrumentos geométricos e construíssem seus próprios moldes, verificando na prática a importância dos conhecimentos sobre ângulos tanto na construção quanto na pavimentação do plano com esses polígonos.

Luiz e Kéren, que demonstravam pouca familiaridade com os instrumentos utilizados na atividade, enfrentaram dificuldades para identificar os ângulos internos e externos dos polígonos, bem como para calcular a soma desses ângulos. Para facilitar o aprendizado desses conceitos, essenciais para a construção dos polígonos e para uma melhor análise de suas propriedades durante a fase de experimentação, foi sugerido que toda a turma preenchesse a Tabela 01 apresentada a seguir.

Tabela 1: Propriedades de polígonos regulares.

Polígono	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo externo	Soma dos ângulos externos
Triângulo				
Quadrado				
Pentágono				
Hexágono				
Octógono				
Dodecágono				

***Fonte*:** Elaborado pelo autor, 2024

Alguns discentes da turma relataram que não tinham estudado ângulos nas séries anteriores e que carregavam dificuldades em matemática devido à falta de aulas no período de pandemia da Covid-19[4], por este motivo estavam com dificuldade para concluir a atividade solicitada. Neste momento, foi feito uma breve revisão sobre ângulos, seguindo as recomendações da BNCC (Brasil, 2018) que não menciona diretamente o "ladrilhamento do plano", mas sugere o desenvolvimento de competências matemáticas e geométricas essenciais para entender e aplicar esse conceito. Notou-se que o preenchimento da tabela foi importante pois a turma passou a ter conhecimento sobre o valor do ângulo interno de cada polígono.

[4] Saiba mais sobre a Covid-19 no site do Ministério da Saúde do Brasil: https://www.gov.br/saude.

Após os moldes prontos, foi solicitado aos estudantes que verificassem na prática quais polígonos eram capazes de ladrilhar ou não plano da mesa da sala de aula. Luiz e Kéren chegaram à conclusão por meio do experimento, que apenas o triângulo, o quadrado e o hexágono eram capazes de ladrilhar perfeitamente o plano sem deixar espaços vazios e sem sobrepor o polígono, atendendo a definição proposta por Júlio *et al.* (2018) que foi apresentada na etapa 1. Na Figura 02 apresentada a seguir é possível ver um exemplo das experimentações realizadas por estudantes nesta etapa da pesquisa.

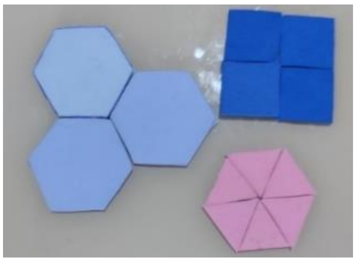

FIGURA 2: Polígonos que ladrilha o plano: triângulo, quadrado e hexágono.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

Segundo Gumieri (2018), a explicação matemática para que o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono ladrilhem no plano sem deixar espaços vazios ou sobreposição está relacionada aos valores de seu ângulo interno, que são iguais, e também tem relação com a soma dos ângulos em torno de um vértice – que deve ser exatamente 360º.

Para calcular o valor da soma dos ângulos internos de qualquer polígono, basta traçar diagonais e observar que cada polígono forma “n-2” triângulos (onde “n” é o número de lados do polígono). Como a soma dos ângulos interno de cada triângulo é igual a 180º, a fórmula para a soma dos ângulos internos é dada por:

$$Soma\ dos\ \hat{a}ngulos\ internos = 180^{\circ}(n-2)$$

Agora para calcular o ângulo interno de um polígono regular basta dividir a soma total dos ângulos internos pelo número de lados do polígono “n” ou seja:

$$\hat{A}ngulo\ interno = [180^{\circ}(n-2)]/n$$

Após a dedução da fórmula do ângulo, convidou-se Luiz e Kéren para aplicarem a fórmula e calcularem o ângulo interno de polígonos como triângulo equilátero, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono; em seguida, cada estudante conferiu os resultados utilizando os moldes das figuras geométricas e com o transferidor. A seguir podem ser vistos os resultados dos cálculos de alguns dos polígonos encontrados por cada participante:

Triângulo equilátero (n=3): valor do ângulo interno é igual a 60º.

Quadrado (n=4): valor do ângulo interno é igual a 90º.

Pentágono (n=5): Valor do ângulo interno é igual a 108º.

Hexágono (n=6): Valor do ângulo interno é igual a 120º.

Após os cálculos do valor do ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono, Luiz e Kéren constataram por meio da soma dos ângulos internos ao redor de cada vértice que os únicos polígonos que resultavam em 360º eram o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono, conforme Gumieri (2018) mostra em seus estudos. Seguem os argumentos matemáticos e fotos de alguns dos experimentos realizados.

Luiz: ladrilhamento feito com seis triângulos equilátero: $60° + 60° + 60° + 60° + 60° + 60° = 360$

Kéren: ladrilhamento feito com 4 quadrados:$90° + 90° + 90° + 90° = 360°$.

Luiz: ladrilhamento feito com 3 hexágono:$120° + 120° + 120° = 360°$.

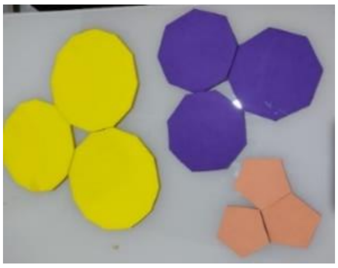

FIGURA 3: Alguns polígonos que não ladrilha o plano: pentágono, octógono e dodecágono.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

Estudantes constataram por meio do experimento (figura 3) que o pentágono, o octógono e o dodecágono não ladrilham o plano, deixam espaços vazios ou sobrepõem a figura, pois a soma dos ângulos internos não resulta em 360º, contrariando a definição de Júlio *et al.* (2018). Após finalização dessa etapa do experimento, os participantes da pesquisa foram desafiados a responder a seguinte pergunta: *Porque é tão comum usar polígonos regulares iguais em pisos e azulejos e qual a propriedade do ângulo interno está relacionada com este fato?*

Em resposta à pergunta feita pelo docente-pesquisador, Luiz disse: “deve ser para economizar material, porque encaixa perfeitamente e também para que o ambiente fique bonito”. Já Kéren reforçou: “Concordo com Luiz, também para diminuir o tempo da obra pois o pedreiro vai precisar fazer menos recorte e consequentemente reduzirá o desperdício, acredito que este deve ser o motivo que a maioria dos pisos das construções tem formatos de triângulo, quadrado e hexágono”. Foi surpresa as respostas de cada participante, pois tinham acabado de fazer o cálculo e constatado que a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice tinha que resultar em 360º, para que o polígono pudesse ladrilhar o plano perfeitamente segundo Gumieri (2018). Com relação a segunda parte da pergunta, nem Luiz e nem Kéren forneceram argumentos convincentes, porém Luiz questionou qual era a relação.

Sendo assim, foi feito um segundo questionamento aos participantes da pesquisa: *Ao dividir 360º pelo valor do ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado, pentágono,* *hexágono, octógono e dodecágono quais deles deixa resto zero? Os polígonos que deixam resto zero ladrilham ou não o plano?*

As questões tinham o intuito de fazer com que Luiz e Kéren construíssem suas respostas por meio da experimentação. Sendo assim, Luiz respondeu: "Quando dividimos 360º pelo ângulo interno do triângulo equilátero, quadrado e hexágono a divisão é exata o que não ocorre com os demais polígonos, portanto deve ser essa a propriedade solicitada pelo professor para que os polígonos pudessem ladrilhar o plano sem deixar espaço e sem sobreposição". Logo em seguida Kéren também comentou: "Olha nunca havia passado pela minha cabeça que todos esses pisos e azulejos bonitos tinha alguma coisa haver com a matemática além da sua forma e do seu custo". Luiz completou: "verdade, antes dessa atividade também nunca tinha imaginado que o fato de o ângulo interno do polígono ser divisível de 360º era o grande motivo das indústrias usarem com tanta frequência estas formas geométricas para fabricação de seus azulejos e cerâmicas.

As respostas de Luiz e Kéren indicam que os mesmos estão evoluindo e começando a compreender a técnica de ladrilhamento e sua relação com o estudo dos ângulos, como mostra Gumieri (2018) em seu trabalho. Além disso, autores como Skovsmose (2001), critica o "paradigma do exercício" no ensino de matemática, onde os alunos resolvem problemas repetitivos de forma mecânica, sem compreender o contexto ou as implicações dos conceitos. Ele defende uma abordagem que conecte a matemática ao cotidiano dos estudantes, promovendo uma compreensão mais profunda e crítica dos conceitos matemáticos, permitindo aos alunos questionar e refletir sobre a aplicação desses conhecimentos na sociedade.

3.3 Terceira etapa: Investigação geométrica com mais de um polígono

Como aprofundamento, no terceiro momento foi proposta uma sessão de três desafios, onde estudantes teriam que combinar dois ou mais tipos de polígonos para pavimentar o plano sem deixar espaço vazio ou sobreposição. Os três desafios foram exibidos na sala de aula com o auxílio de um projetor digital. É importante destacar que cada discente poderia ou não encontrar dificuldades para apresentar soluções. Nesse sentido, a intervenção pedagógica do professor, ao guiar e apoiar estudantes, ajudará a superar barreiras e alcançar novos níveis de entendimento, convergindo com os estudos de Vygotsky (1978) e favorecendo o desenvolvimento cognitivo.

O primeiro desafio proposto foi o seguinte: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando dois tipos de polígonos? Se sim, mostre um exemplo e utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta*. Na figura 4, abaixo segue imagens de algumas das combinações realizadas por Kéren e Luiz para solucionar a atividade proposta.

a) Participante Luiz b) Participante Kéren

FIGURA 4: Possíveis soluções encontradas pelos discentes.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

Observando as imagens das soluções apresentadas por cada participante da pesquisa, nota-se que Luiz conseguiu achar três soluções para o problema proposto e Kéren também fez três soluções, todavia duas delas não atende ao enunciado. Em uma das soluções feita por Kéren foi usado mais de dois polígonos (pentágono, quadrado e triângulo) contrariando o enunciado da questão, na outra solução os polígonos escolhidos por ela (octógono e triângulo equilátero) não cobre o plano sem deixar espaço vazios ou sobreposição, contrariando a definição dada por Gumieri (2018), isso ocorre porque a soma dos seus ângulos internos ao redor de cada vértice é diferente de 360º.

Ao questionar cada participante da pesquisa sobre as estratégias que eles utilizaram para resolver o desafio proposto, Luiz respondeu: "Fiz várias combinações e com isso conseguir fazer duas soluções, a terceira solução usei a tabela que construímos na etapa 1 e com o valor dos ângulos internos de cada polígono, fui combinando até que a sua soma completasse 360º, como na combinação (Figura 4) de dois hexágonos e dois triângulos equilátero $(120^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ)$". Kéren também respondeu: "Fiz por tentativa, só que teve um que usei octógono e triângulo equilátero e ficou espaço entre os polígonos, aí fiz um desenho parecido com um gatinho". (Figura 4).

Ao concluir esta etapa do experimento, notou-se que Luiz e Kéren tiveram uma evolução tanto nos conceitos sobre ladrilhamento como no aprendizado sobre ângulos e suas propriedades, convergindo com os estudos de Skovsmose (2001), que propõe que o ensino de matemática seja mais conectado ao cotidiano e à realidade social dos alunos, favorecendo a compreensão profunda dos conceitos e a capacidade de questionar e analisar a matemática de maneira crítica.

Também foi observado que experimentos como este podem despertar o interesse de estudantes pela Arte, ao mesmo tempo que exploram os conceitos matemáticos, a exemplo do comentário de Kéren quando afirma que o seu desenho que combina octógono e triângulo parecia com o desenho de um gatinho. Esta situação faz lembrar os azulejos de Penrose (2006), e também as obras de Escher (2004), que exploram conceitos de ladrilhamento de forma artística.

O segundo desafio proposto foi: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando 3 tipos de polígonos? Se sim, mostre um exemplo e utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta.* A Figura 5 a seguir mostra algumas das soluções apresentadas por Luiz e Kéren.

a) Participante Luiz b) Participante Kéren

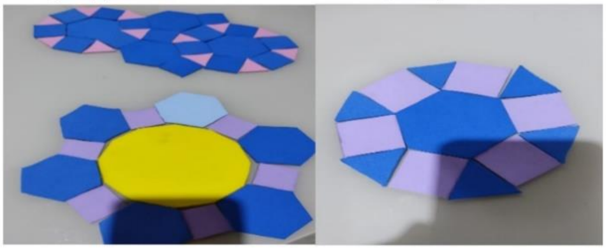

FIGURA 5: Possíveis soluções encontradas por Luiz e Kéren.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

Apesar de este desafio ser mais difícil do que as atividades propostas anteriormente, Luiz e Kéren o concluiu com mais facilidade, pois, ao serem questionados de forma individual sobre as estratégias utilizadas para solucionar o problema, cada participante da pesquisa apresentou respostas muito semelhantes que culminou numa combinação de polígonos até que a soma dos ângulos interno das três figuras geométricas ao redor de cada vértice somasse 360º como na atividade do desafio 1.

Portanto, é possível concluir que nesta fase do experimento Luiz e Kéren já estava dominando a técnica do ladrilhamento por meio da observação dos ângulos internos de cada polígono em torno de um vértice, que é condição necessária para que estas figuras geométricas se encontrem de maneira justa, sem deixar espaço vazio e sem sobreposição conforme definição de Júlio *et al.* (2018) relatada na Etapa 1.

No terceiro desafio foram feitas as seguintes questões: *É possível ladrilhar a sala de aula utilizando quatro tipos de polígonos regulares? Se sim, qual o ladrilho que você montou? Utilize argumentos matemáticos para confirmar a sua resposta.* Após 20 minutos nenhum participante da pesquisa conseguiu fornecer um exemplo de ladrilhamento usando mais de três polígonos diferentes, o que vai de acordo com os estudos de Júlio *et al.* (2018), que mostra que os ladrilhos formam a pavimentação do plano, através do revestimento de uma região plana sem que haja espaço ou sobreposição entre os polígonos.

Questionados sobre as estratégias usadas, Luiz e Kéren alegaram que fizeram várias tentativas usando os moldes dos polígonos sem obter sucesso, também tentaram combinar a soma dos ângulos internos de cada polígono ao redor de um vértice mais a soma sempre era diferente de 360º. Luiz afirmou: “Ao combinar um quadrado, um hexágono, um triângulo equilátero e um octógono ($90^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 135^\circ = 405^\circ$), a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice ultrapassa 360º e, portanto, impossibilita que esses polígonos se encaixem perfeitamente sem sobreposição”. Kéren também argumentou: “Mesmo usando os polígonos que possuem os menores ângulos internos, como o triângulo, o quadrado, o pentágono e o hexágono $(60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ)$ os valores ultrapassam 360º então acho que não tem solução”.

Esperava-se que cada participante da pesquisa elaborasse possíveis combinações com os moldes recortados para resolver o problema proposto ou que utilizasse de argumentos matemáticos convincentes para mostrar que a soma dos ângulos internos de quatro polígonos regulares diferentes não resulta em 360º e foi o que ocorreu. Portanto, ao final desta etapa é possível concluir que a sequência didática proposta por esta pesquisa pode sim ser uma ferramenta metodológica eficaz para o aprendizado de ângulos e outras áreas do conhecimento, superando as práticas que utilizam somente exercícios e abstrações.

3.4 Quarta etapa: Matemática e Arte

No quarto momento, toda a turma do 8º ano foi convidada a criar um mosaico artístico utilizando polígonos, inspirando-se ou não em obras de artistas que utilizam técnicas de ladrilhamento, a exemplo de Escher (2004), que explorou padrões de ladrilhamento e simetria, unindo arte e matemática de maneira inovadora. A turma foi orientada a realizar releituras de obras de artistas baianos conforme a escolha deles, podendo ser Bel Borba (1957), Carybé (1911) ou do Cearense de nascimento e baiano de criação Eliezer Nobre (2017) que pinta, desenha, faz esculturas e azulejaria e seus mosaicos se destacam por um trabalho minucioso de unir peças por peças.

A oficina buscou estabelecer uma conexão com a disciplina de Arte, assim, estudantes puderam explorar conceitos de geometria enquanto desenvolviam habilidades matemáticas e artísticas, incentivando a criatividade e a colaboração através de uma abordagem prática e interdisciplinar. Ao integrar conceitos matemáticos com a expressão artística, o objetivo foi aprofundar a compreensão de discentes sobre polígonos, ângulos, padrões e simetrias de maneira lúdica. A Figura 6 apresenta algumas das criações realizadas por Luiz e Kéren, evidenciando o resultado desse processo colaborativo e criativo.

FIGURA 6: Releitura feitas por Luiz e Kéren.
FONTE: Elaborado pelos participantes (2024).

Durante a oficina de arte, discentes se envolveram profundamente, demonstrando entusiasmo e curiosidade e afirmando que essa experiência ampliou sua compreensão da arte baiana e da cultura local, ressaltando a conexão com a identidade e o cotidiano da Bahia. Essa atividade não só despertou a sensibilidade artística, mas também proporcionou um aprendizado sobre as raízes culturais da região, destacando a arte como uma ferramenta valiosa para a educação e o autoconhecimento.

Experiências como estas mostram como a matemática e o cotidiano podem se relacionar. Kéren ressaltou a capacidade de identificar ângulos em objetos ao seu redor como portas, janelas, paredes e obras de arte; já Luiz afirmou que a experiência facilitou o seu entendimento sobre ângulos agudos, rasos e obtusos e como eles estão presente em toda parte. Assim, a oficina não apenas promoveu a compreensão dos conceitos de ângulos, mas também estimulou o interesse de estudantes pela matemática de forma prática e contextualizada.

A utilização do ladrilhamento como ferramenta pedagógica vai além da exploração artística e cultural; ela se estende de forma significativa para a resolução de problemas matemáticos, especialmente na geometria é isso que abordaremos na próxima etapa.

3.5 Quinta etapa: Aplicando o Ladrilhamento na resolução de atividades sobre ângulos

Na quinta etapa, a turma foi convidada a resolver um questionário com problemas relacionados a ângulos e suas propriedades, utilizando-se dos conhecimentos adquiridos ao longo das etapas anteriores, com foco no uso do ladrilhamento como ferramenta central. Na primeira questão, estudantes exploraram as definições e propriedades de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos, evidenciando uma crescente compreensão dos conceitos geométricos:

1) Observe a figura e responda:

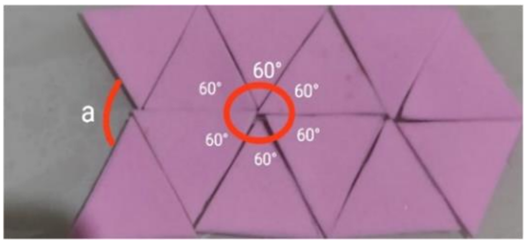

FIGURA 7: Imagem do exercício 1.
FONTE: O próprio autor (2024).

a) Quanto mede o ângulo ao redor de cada vértice?

b) Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo?

c) Quanto mede o ângulo interno de um hexágono regular?

d) Quanto mede a soma dos ângulos interno de um hexágono regular?

*e) Quanto mede o ângulo **a** da figura?*

f) Qual a área e o perímetro do hexágono regular da figura, sabendo que seu lado mede 4 cm?

Nos itens (a) e (b), Kéren e Luiz foram, de maneira geral, bem-sucedidos em suas respostas, destacando a importância das atividades práticas de investigação. É possível observar que ambos identificaram que a soma dos ângulos em torno de um vértice é dada pela soma dos ângulos internos de 6 triângulos equiláteros $(6\, X\, 60^{\circ} = 360^{\circ})$, e que a soma dos ângulos internos de um triângulo equilátero é 3 vezes o ângulo de 60º, ou seja, 180º. As respostas de Kéren e Luiz refletem a solidificação do aprendizado de ambos em conceitos fundamentais da geometria, conforme defende Frankenstein (1983), a educação matemática não deve se limitar à aplicação mecânica de fórmulas e algoritmos, mas sim buscar o desenvolvimento de uma consciência crítica nos alunos.

Já nas questões (c) e (d) Kéren aplicou a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono abordada na etapa 2. A estudante identificou que o hexágono, com 6 lados, possui uma soma de ângulos internos de 720°, o que foi um ponto positivo na resolução do item (d). Para o item (c), bastou dividir o valor da soma dos ângulos internos pelo número de lados do Polígono ($720/6 = 120^{\circ}$), aplicação da fórmula discutida na etapa 2 para ângulos internos.

Já Luiz resolveu o item (c) observando que o ângulo interno de um hexágono regular é formado pela soma dos ângulos internos de dois triângulos equiláteros, medindo, portanto, 120º. Para o item (d) multiplicou o valor do ângulo interno (120º) pelo número de ângulos internos do hexágono (6), resultando em 720º.

As respostas de Kéren e Luiz estão alinhadas com a teoria de Van Hiele (1986), que propõe que a compreensão geométrica se desenvolve em níveis (conforme detalhado no referencial teórico), passando do reconhecimento ao raciocínio lógico. A questão (e) foi resolvida com facilidade por Kéren, que observou que o valor do ângulo $\hat{a}$ poderia ser obtido subtraindo a soma dos ângulos de 4 triângulos equiláteros do total do ângulo de uma volta em torno do vértice $(360^{\circ} - 240^{\circ} = 120^{\circ})$. Isso indica que Luiz e Kéren conseguiram identificar ângulos em configurações geométricas complexas, o que é importante para o desenvolvimento de habilidades espaciais, conforme Skovsmose (2001), enfatiza a necessidade de desenvolver habilidades cognitivas e espaciais nos estudantes, além de promover uma visão crítica sobre os impactos sociais e culturais da matemática.

Na questão (f), Luiz acertou o valor do perímetro somando os 6 lados do hexágono, mas teve dificuldade em calcular a área do hexágono apenas com a informação do lado. Já Kéren deixou a questão em branco. Esses registros mostram que os conceitos de áreas e perímetros precisam ser mais trabalhados, sugerindo melhorias na sequência didática para abordar essas questões de áreas e perímetro de figuras planas.

No geral, os resultados das respostas de Kéren e Luiz indicam que a metodologia empregada, com ênfase na manipulação de ladrilhos e na visualização prática, não apenas facilitou a compreensão dos ângulos, mas também motivou ambos participantes da pesquisa a explorar e aplicar os conceitos matemáticos em situações concretas.

Dando continuidade a essa exploração, a próxima questão desafia estudantes a aprofundar ainda mais suas habilidades de observação e aplicação prática dos conceitos geométricos. Assim, na questão 2 temos:

2) Observe a figura e responda:

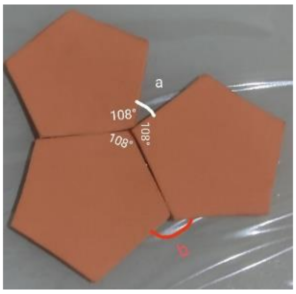

FIGURA 8: Imagem do exercício 2.
FONTE: O próprio autor (2024).

a) Qual o valor do ângulo interno do pentágono?

b) Quanto mede a soma dos ângulos internos do pentágono?

c) Quanto mede o ângulo a?

d) Quanto mede o ângulo b?

e) Qual a área do pentágono da figura sabendo que seu lado mede 4 cm?

Nas questões apresentadas, Kéren e Luiz aplicaram os conhecimentos adquiridos nas fases de experimentação com ladrilhos e propriedades geométricas dos polígonos. No item (a), observou-se que a maioria da turma, incluindo Luiz e Kéren, resolveu o problema proposto sem a necessidade de aplicar a fórmula matemática. Foi possível identificar o ângulo interno da figura diretamente pela observação, o que reforça o aprendizado visual e prático. No entanto, caso o ângulo interno não estivesse fornecido, seria viável aplicar a fórmula abordada na Etapa 2 para os ângulos internos de um pentágono. Assim, temos:

$$\hat{A}ngulo\ interno = 180^\circ(5-2)/5 = 108^\circ$$

Portanto, o ângulo interno de um pentágono é 108º.

No item (b), a soma dos ângulos internos do pentágono foi calculada com facilidade pela maioria da turma, que apenas multiplicaram o valor do ângulo interno dado (108º) pelo número de ângulos internos do pentágono (5), obtendo: $108^\circ\ X\ 5 = 540^\circ$. Esse resultado poderia também ter sido obtido pela fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, discutida na Etapa 2 desta pesquisa. Neste caso:

$$Soma\ dos\ \hat{a}ngulos\ internos = 180^\circ(5-2) = 3\ X\ 180^\circ = 540^\circ$$

A observação feita pela turma de que muitos exercícios podem ser resolvidos sem uso direto de fórmulas, demonstra uma habilidade importante de percepção visual e reconhecimento de padrões. Esse desenvolvimento está em conformidade com a teoria de Van Hiele (1986), que afirma que a compreensão geométrica se dá em níveis, e o reconhecimento de formas e suas propriedades é uma etapa crucial no processo de aprendizado geométrico.

Esses resultados reforçam a importância de oferecer atividades que permitam aos estudantes relacionar conceitos abstratos com situações concretas, promovendo um entendimento mais profundo da geometria.

Os itens (c) e (d) exploraram a identificação de ângulos específicos no desenho. Kéren e Luiz não apresentaram dificuldades, ambos tiveram raciocínio semelhantes: subtraíram 360º, que é o ângulo de uma volta da soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor do vértice, obtendo como resposta o valor de 36º; já no item (d) o valor de 144º foi registrado, conforme esperado. Este tipo de atividade ajuda a desenvolver o raciocínio geométrico, conforme discutido por Van Hiele (1986), promovendo uma transição do nível de reconhecimento visual pra o raciocínio mais analítico.

No item (f), que envolveu o cálculo da área de um pentágono regular, novamente observou-se que nenhum estudante acertou a questão. Isso indica a necessidade de melhorar essa sequência didática para que esses conceitos de áreas de figuras planas sejam melhor compreendidos por discentes, possivelmente, incluir mais atividades práticas que envolvam a medição de áreas com base na decomposição em triângulos, como defende Skovsmose (2001), a aprendizagem deve ser contextualizada e conectada a situações reais, incentivando os alunos a refletirem sobre as implicações e usos da matemática na sociedade.

Seguindo a sequência de atividades práticas, a terceira questão foi elaborada para aprofundar o entendimento da turma sobre a aplicação de conceitos geométricos, especialmente relacionados aos ângulos e aos ladrilhamentos, para que estudantes pudessem aplicar seus conhecimentos de forma mais abrangente e crítica. A seguir, temos a questão 3:

3) Observe a figura e responda:

FIGURA 9: Imagem do exercício 3.
FONTE: O próprio autor (2024).

a) Qual o valor do ângulo a?

b) Qual o nome dos polígonos da figura?

c) Qual o valor do ângulo externo do hexágono?

d) Qual o nome dos polígonos da figura acima, que apresenta respectivamente ângulo agudo, reto e obtuso.

No item (a) desta questão, Kéren aplicou a fórmula do ângulo interno de um hexágono:

$$\hat{A}ngulo\ interno = 180^{\circ}(6-2)/6 = 120^{\circ}$$

e Luiz subtraiu o ângulo central (360º) com a soma dos ângulos de dois quadrados e um triângulo equilátero (240º) resultando em 120º que era o resultado esperado. Observou-se que o exercício de pavimentação com triângulos, quadrados e hexágonos apresentado anteriormente permitiu que estudantes vissem como os ângulos se complementam para preencher espaços conforme, Gumieri (2018) já demonstrou em seus estudos. Além disso, esta é uma possível ferramenta para o estudo de simetrias, como reflexão, rotação e translação, e para o desenvolvimento de habilidades espaciais e de visualização.

Atividade como essa de pavimentação de superfície desafia estudantes a aplicarem os conceitos de ângulos, divisão, multiplicação e proporção, explorando a otimização do espaço e o uso criativo de ladrilhos regulares. Essa prática estimula o pensamento crítico e criativo, desenvolvendo estratégias para lidar com formas complexas. Os benefícios dessa abordagem incluí a visualização concreta dos conceitos, desenvolvimento de habilidades espaciais, maior engajamento de estudantes e uma conexão com o cotidiano, aproximando a matemática de contextos reais, segundo Skovsmose (2001), argumenta que a matemática não deve ser ensinada apenas como um conjunto de técnicas e fórmulas, mas também como uma ferramenta para compreender e questionar o mundo ao redor.

No item (b), Kéren e Luiz não apresentaram dificuldades em identificar corretamente a resposta (triângulo equilátero, quadrado e hexágono) conforme já era esperado. Essa identificação foi direta, visto que a turma já tinha explorado essas formas em etapas anteriores, utilizando ladrilhos. Estes dados evidenciam que a abordagem com ladrilhos pode enriquecer o aprendizado, facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos e despertando o interesse pela matemática, conforme os estudos de Kolb (1984).

Já no item (c), Kéren e Luiz adotaram abordagens complementares, refletindo diferentes níveis de compreensão geométrica, Kéren utilizou a fórmula aprendida em sala de aula, dividindo 360º pelo número de lados do hexágono para calcular o ângulo externo (60º), demonstrando uma compreensão dedutiva, típica do nível 3 da teoria de Van Hiele (1986). Já Luiz, por sua vez, optou por uma abordagem mais visual, observando a soma dos ângulos externos ao redor de um ponto e dividindo por seis, chegando ao mesmo resultado sem o uso explícito da fórmula. Sua abordagem se alinha ao nível 2 de Van Hiele (1986), onde o raciocínio visual ainda predomina.

Teoricamente, essas diferenças refletem como atividades práticas, como o uso de ladrilhos, apoiam a progressão nos níveis de desenvolvimento geométrico. Enquanto Kéren já consegue aplicar fórmulas com facilidade, Luiz depende mais da manipulação concreta e da observação visual para construir seu conhecimento, o que reforça a importância de abordagens pedagógicas que utilizem materiais concretos e visualização, como defendido por Piaget (1971). A experiência com ladrilhos foi fundamental para ambos, fornecendo uma base sólida para a exploração prática e, futuramente, a abstração de conceitos geométricos.

Por fim, no item (d), o desempenho de Kéren e Luiz revelou aspectos distintos de seus níveis de desenvolvimento geométrico. Luiz, utilizando uma abordagem visual, identificou os ângulos por meio da observação direta das formas; sua experiência prática com ladrilhos permitiu reconhecer o triângulo como o polígono com ângulo agudo, o quadrado com o ângulo reto e o hexágono com o ângulo obtuso. A estratégia de Luiz reflete o nível 2 da teoria de Van Hiele (1986), onde estudantes ainda dependem de propriedades visíveis e experimentais. Por sua vez, Kéren aplicou uma abordagem mais abstrata e teórica, utilizando raciocínio dedutivo para identificar corretamente os ângulos nos polígonos. Ela demonstrou estar no nível 3 de Van Hiele (1986), onde estudantes utilizam definições e fórmulas abstratas para resolver problemas de forma independente.

As respostas de ambos reforçam os princípios da Educação Matemática Crítica (EMC), que destaca a importância de experiências significativas e contextualizadas no processo de aprendizagem.

Observou-se que o uso de ladrilhos como ferramenta pedagógica ajudou cada participante da pesquisa a progredirem em suas habilidades geométricas, com Luiz ainda dependente da visualização prática e Kéren demonstrando uma compreensão mais abstrata.

Em resumo, as abordagens diferenciadas de Kéren e Luiz evidenciam a importância de estratégias pedagógicas variadas para atender ao desenvolvimento geométrico de cada estudante, conforme as teorias de Van Hiele (1986) e Skovsmose (2001). Ao final desta etapa, conclui-se que integrar o ladrilhamento na resolução de exercícios matemáticos enriquece o aprendizado e desperta em estudantes uma nova forma de ver a matemática, onde experimentação e criatividade são aliadas na resolução de problemas.

Considerações finais

Pode-se ver o quão significativos foram os resultados desta pesquisa em relação à compreensão dos conceitos geométricos, tanto por Luiz quanto por Kéren. Em geral, a turma de estudantes mostrou uma maior percepção dos conceitos de ângulos e suas propriedades enquanto construíam e faziam os experimentos com moldes de polígonos regulares para pavimentar a superfície da mesa de sala de aula.

Por meio dessa abordagem prática, estudantes visualizaram os ângulos de maneira concreta, facilitando a assimilação dos conceitos abstratos e estimulando uma maior autonomia no processo de aprendizagem.

Voltando ao objetivo principal deste trabalho, que foi o de investigar como estudantes entendem e aprendem os conceitos de ângulos por meio da experimentação com ladrilhos, é possível perceber que, ao serem expostos a atividade interativas e práticas, Luiz e Kéren desenvolveram uma compreensão mais aprofundada dos conceitos ao longo das atividades. A construção e a investigação geométrica com os moldes dos polígonos ajudaram a conectar a teoria à prática, demonstrando que os ângulos não são apenas abstrações matemáticas, mas elementos presentes em construções do nosso cotidiano.

Ao incorporar práticas concretas, como a investigação geométrica, estudantes conseguem conectar a teoria à realidade, facilitando a compreensão de conceitos abstratos. Isso torna a matemática mais acessível e relevante no dia a dia, fortalecendo o processo de aprendizagem por meio de experimentação prática.

Contudo, muitas dificuldades surgiram no decorrer das etapas da pesquisa. Estudantes inicialmente enfrentaram dificuldades no uso dos instrumentos geométricos, como régua, compasso e transferidor, devido à falta de prática.

Essas dificuldades foi gradualmente sendo superadas no decorrer das etapas da pesquisa, mas destacou a importância de mais aulas práticas no ensino da matemática. Além disso, para que discentes conseguissem absorver os conceitos de ângulos por meio do experimento, foi necessário intervenções constantes do pesquisador para esclarecer dúvidas e ajustar o foco das atividades propostas.

Um ponto positivo nessa sequência didática foi a motivação e a participação da turma nas atividades propostas nas oficinas. A experimentação com moldes de polígonos regulares despertou um interesse em estudantes, evidenciando a importância de incluir atividades interativas no ensino de matemática, especialmente na geometria.

A construção dos moldes e a investigação sobre quais polígonos podem ladrilhar o plano mostraram a geometria sob uma nova perspectiva, tornando o aprendizado mais interessante e motivador, segundo Piaget (1971), o aprendizado se dá de maneira mais eficaz quando as crianças podem manipular ativamente objetos, o que facilita a transição do pensamento concreto para o abstrato.

Por fim, o estudo abre espaço para novas pesquisas que busquem integrar as práticas experimentais ao ensino de geometria. Lembrando que os resultados dessa pesquisa refletem a realidade específica de cada estudante envolvido na pesquisa, podendo não ser generalizáveis para outros contextos escolares. Mesmo assim, o estudo contribui para o debate sobre a necessidade de inovar e aplicar novas metodologias no ensino da matemática em especial ao ensino de ângulos de forma mais lúdica e contextualizada.

Referências

ALLEN, D. K. *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and Development*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.

BISHOP, A. J. *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

BORBA, Alberto José Costa. *Painéis e Murais de Mosaico em Diversos Locais de Salvador*. 1984.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Educação infantil e ensino fundamental*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 28 out. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

COXETER, H. S. M. *Poliedros Regulares*. Trad. Hélio J. D. L. Costa. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. *Desafio Geométrico - Módulo I*. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser, 1981.

ECHER, Maurits Cornelius. *M. C. Escher - Gravura e Desenhos*. São Paulo: Distribuidora Paisagem, 2004.

EISNER, Elliot W. The arts and the creation of mind. New Haven: Yale University Press, 2002.

FRANKENSTEIN, M. *Critical Mathematics Education: An Introduction.* 1983.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra, 1970.

GIL, Carlos Alberto de Oliveira. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRUBE, Ernst J. *Islamic Pottery*. London: Philip Wilson Publishers, 1989.

GUMIERI, A. C. *Aplicação da Técnica de Ladrilhamento com Polígonos Regulares nos Anos Finais do Ensino Fundamental*. 100 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

INHELDER, B. *Le diagnostic du raisonnement chez les débiles mentaux. 1963.*

JÚLIO, R. S.; SILVA, G. H. G.; NOGUEIRA, V. G. S.; OLIVEIRA, A. D. C. *Ladrilhamentos e Educação Matemática*. Boletim Online de Educação Matemática, 2018.

KEPLER, Johannes. *A Harmonia do Mundo*. Trad. Luiz A. S. Gomes. 1. ed. São Paulo: Edipro, 2007.

MELLO, L. I. P. *Ladrilhamentos no Plano: Uma Atividade para o Ensino Médio*. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, 2015. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1275.

NOBRE, Eliezer. *A Bahia Renovada: O Mosaico de Eliezer Nobre*. Revista Eletrônica. Disponível em: https://mosaicosdobrasil.tripod.com/id176.html. Acesso em: 28 out. 2024.

OLIVEIRA, J. F. M. *Pavimentações no Plano Euclidiano*. Dissertação (Mestrado). Unicamp, Campinas, 2015.

PENROSE, Roger. *O Caminho para a Realidade: Um Guia Completo para as Leis do Universo*. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

PIAGET, Jean. *A Formação do Símbolo na Criança: Imitação, Jogo e Sonho, Imagem e Representação*. 3. ed. São Paulo: Editora Zahar, 1971.

SALLUM, Elvia Mureb. *Ladrilhamento*. São Paulo: USP, 2016. Disponível em: https://www.slideshare.net/WilsonMarques8/ladrilahamento. Acesso em: 28 out. 2024.

SANTOS, João. *Práticas Inovadoras no Ensino da Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Educação, 2014.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia*. 1. ed. Campinas: Papirus, 2001.

VAN HIELE, P. M. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press, 1986.

VYGOTSKY, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press, 1978.